基于投资指数与风险指数的 R_N&I 投资组合模型*

张昇平　吴冲锋

（上海交通大学 金融工程研究中心 上海 200052）

摘要：本文构建了基于投资指数 $\mathbf{R_N}$ 和风险指数 **I** 的 $\mathbf{R_N}$**&I** 投资组合模型，给出了模型的解析解，刻画了投资者的投资决策行为，阐述了投资者形成最优投资组合的机理。在模型中通过引入反正切三角函数来刻画风险暴露给投资者带来的“*S*”型风险感受，是对线性风险感受的一种补充和改进。与 Markowitz 均值－方差模型求解最优投资组合的方法有所不同，$\mathbf{R_N}$**&I** 投资组合模型为最优投资组合的构建提供了新思路、新方法。

关键词：投资指数 $\mathbf{R_N}$；风险指数 **I**；投资组合模型；最优投资组合；

中国分类号：F830

1　引言

Markowitz(1952)提出的关于投资组合的均值－方差方法[1]，成为金融投资理论研究的主要论题和决策实践的重要工具，构成了现代投资组合理论的核心基础。其基本思想是将资产的收益(率)看成是随机变量，用收益(率)的期望度量投资收益，用收益(率)的方差度量投资收益的风险，在期望收益给定的条件下，最小化风险(或者在风险给定的条件下，最大化期望收益)。随后，学者们发展出了基于不同的风险测度(如半方差、绝对偏差、β 系数等)和不同的投资准则(如最大化几何平均收益率、最大化单位风险收益、安全第一准则等)的众多投资组合模型。

与M-V模型，以及由此基础上发展出来的投资组合模型有所不同，本文从新的视角，构建了$\mathbf{R_N}$**&I**投资组合模型。

我们将投资决策过程分解为两个问题的求解：1）决定投资对象集，选什么资产进行投资；2）决定每个资产头寸，多少为优。理性投资者在构建投资组合决定资产头寸时，以追求效用最大化为目标，寻求风险与收益的最佳均衡点，而风险、效用、最优投资组合都具有隶属性，所有风险、效用、最优投资组合都依赖于行为主体而存在。为此，我们定义了关于风险厌恶系数 a、不确定损益 x 和此损益下的概率 $dF_X(x)$ (或 P(X=x))的权重函数[2] $\phi(a, x, dF_X(x))$，用此权重函数对整个损益分布进行修正，得到经风险调整后的期望超额收益 $\mathbf{R_N}$。基于 $\mathbf{R_N}$ 可用来衡量投资于单位风险资产的风险效益[3]，根据其值大小来选择投资对象，本文给 $\mathbf{R_N}$ 一个特定名称——投资指数。同时在投资指数 $\mathbf{R_N}$ 的基础上，我们还构造了与风险暴露(Risk Exposure)相关的风险指数 **I**，用以衡量效益风险。与传统基于概率损失的风险测度定义不同(如方差、半方差、绝对偏差、β 系数、风险值 VaR、期望落差 *ES*、下

* 本研究得到国家自然科学基金重点项目(批准号：70331001)“金融风险测度和建模”的资助。作者感谢上海交通大学管理学院现代金融研究中心的刘海龙教授、吴文锋教授、俞新贞博士、郭磊博士、黄学军博士、王柱博士和证券金融研究所的廖士光博士、黄峰博士等提供的有益见解和批评。

[1] 下文中，将 Markowitz 均值－方差模型简称为 M-V 模型。

[2] 本文在这里借用“权重函数”术语，不刻意要求其之和为 1。

[3] 风险效益可以理解为经风险调整后的收益(收益/风险比)；效益风险可以理解为经收益调整后的风险(风险/收益比) 。

偏矩 *LPM* 等)，风险指数 **I** 是在投资指数 $\mathbf{R_N}$ 基础之上，引入反正切三角函数，根据风险暴露给投资者带来"***S***"型风险感受的经济涵义构建而成。投资者可以通过计算投资指数 $\mathbf{R_N}$ 和风险指数 **I**，分步解决投资决策过程中的两个问题，最后得到最优投资组合 $(w_0, w_1, \cdots w_n)$ 和组合风险指数 $\mathbf{I_P}$。

2　$\mathbf{R_N}$&I 投资组合模型

1.1 研究问题与研究方法

影响投资者行为的因素很多，如资金约束、法律约束等，本文研究的主要问题是限于给定这些客观条件，在不考虑风险资产相关性的前提下，投资者如何权衡收益和风险，决定投资对象和头寸，形成最优投资组合。研究的方法是通过定义两个工具指标：1）投资指数 $\mathbf{R_N}$，为投资者主观调整后的收益（类似于 **Sharpe ratio**），用它来衡量风险效益；2）风险指数 **I**，刻画了风险暴露给投资者带来的（单位超额收益下的）风险调整，用它来衡量效益风险。最后通过由投资指数 $\mathbf{R_N}$ 和风险指数 **I** 构建而成的投资组合模型，解决投资者个人投资决策问题。

1.2 M-V 模型在刻画风险方面存在的不足

从风险测度的角度出发，可以将 M-V 投资组合模型求解过程分解为两步：1）以方差 σ^2 来刻画单位资产的风险；2）以线性来刻画风险暴露给投资者带来单位超额收益风险的调整[4]。M-V 模型通过第一步完成对单位资产的风险度量，通过第二步完成因风险暴露所带来的风险调整，最终当组合中各资产的单位收益所承担的风险相等时，得到最优投资组合解。

从上面分析可知，M-V 模型在刻画风险过程中存在以下两个不足。

1）方差 σ^2 作为单位资产的风险测度存在的不足

M-V 模型以方差来度量资产的风险，

$$\sigma^2 = E(X - E(X))^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x - E(X))^2}{x} x dF_X(x)\text{。} \tag{1}$$

其中：X 为一资产收益（率）随机变量，$F_X(x)$ 为客观概率分布函数，$E(\cdot)$ 为客观概率下的数学期望算子。（1）式可以解释为：风险测度 σ^2 是关于风险事件 $(x, dF_X(x))$ 和权重函数 $\frac{(x - E(X))^2}{x}$ 之积的求和。可以看出，M-V 模型在定义风险测度时，排除了风险主体的差异，假定投资者都是同质的（homogeneous），且给予风险事件 $(x, dF_X(x))$ 的加权 $\frac{(x - E(X))^2}{x}$ 与投资者的风险属性[5]（如风险偏好等）无关，这就存在一些不足。

---

[4] 事实上，运用概率论的技术来测度风险，如果定义了单位资产的风险测度，不同的风险暴露 *w*(组合中的各资产投资权重)带来的风险调整也就完全确定了。本文在这里将其分开论述，是启发式的(heuristic)，有助于理解下文模型的构建。

[5] 本文中的投资者风险属性是指投资者风险观。投资者风险偏好是投资者风险属性的一部分。在下文中，

2）风险暴露给投资者带来的线性风险感受所存在的不足

M-V 模型的风险暴露头寸 w 与收益和风险的关系分别为 (w, wu_0)、$(w, w^2\sigma_0^2)$，与收益调整后的风险关系 $(w, w\sigma_0^2/u_0)$，如图 1 所示。

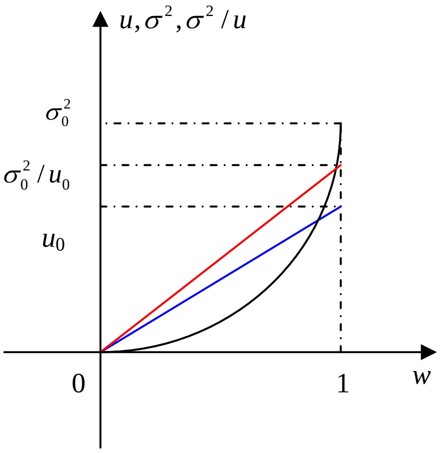

图 1 M-V 模型相关变量与暴露头寸 w 关系

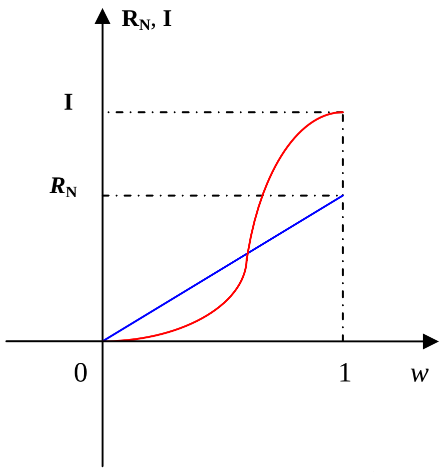

图 2 (**R$_N$,I**)与暴露头寸 w 关系

从图 1 可以看出，M-V 模型在使用 σ^2 测度风险的同时，假设了投资者对于风险暴露的风险感受是边际递增的，对收益调整后的风险感受是线性的。M-V 模型刻画了经收益调整后的风险感受是线性变化的一类投资者。显然，现实中风险暴露给投资者带来的风险感受应该是多样的（线性、非线性等），本文为这种多样性、以及复杂的非线性的风险感受刻画提供了一种研究方法。我们将引入了反正切三角函数来刻画风险暴露给投资者带来的一簇“***S***”型风险感受（如图 2 所示）。“***S***”型风险感受，可以很好的刻画一阶条件下边际递增、二阶条件下在某一阀值两边（风险感受的）敏感性递减（diminishing sensitivity）特性，较好地反映投资者非线性变化的风险感受。

1.3 投资指数 R$_N$ 构建

首先，定义关于风险厌恶系数 $a \in [0,1]$[6]、不确定损益 x 和此损益概率 $dF_X(x)$ 的权重函数 $\phi_X(x, dF_X(x); a): R \times [0,1] \times [0,1] \to (0, +\infty)$，在此基础上进一步定义投资者主观调整后的预期收益率——投资指数 **R$_N$**。

定义 1（投资指数 R$_N$）：记某一风险资产的收益率为随机变量 X，它具有连续的密度函数 $f(x)$，分布函数 $F_X(x)$； 或离散的收益分布 $P(X=x_i)=P_i$，i=1,2⋯n。定义

$$\mathbf{R_N}=\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_X(x, dF_X(x); a)(x-R_f)dF_X(x) \text{ 或 } \mathbf{R_N}=\sum_{i=1}^{n} \phi_X(x_i, P_i; a)(x_i-R_f)P_i \text{。} \quad (2)$$

我们将由上式定义的 **R$_N$** 称之为**投资指数**。其中，R_f 为已考虑持有期的无风险收益率。

简单地以风险偏好或风险厌恶系数来刻画投资者的风险属性。

[6] 文中所指的风险厌恶系数可以理解为 Arrow(1970)定义的风险规避系数单调映射到区间[0,1]。在本文中只研究风险中性(a=0)和风险厌恶型(a>0)两类投资者，a 越大表示投资者越厌恶风险。

上式中的权重函数 $\phi(a,x,dF_X(x))$ 可以选用形式[7]：

$$\phi_X(x,dF_X(x);a)=\tilde{\phi}_X(x,dF_X(x);a)/\tilde{\rho}(X;a) \text{。} \tag{3}$$

其中，$\tilde{\rho}(X;a)\in(0,+\infty)$ 为随机变量 X 的风险测度。当 $\tilde{\phi}_X(x,dF_X(x);a)$ 满足条件 1）$\tilde{\phi}_X(x,dF_X(x);a)>0$ 和 2）$\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{\phi}_X(x,dF_X(x);a)dF_X(x)=1$ 时，$\phi(a,x,dF_X(x))$ 和 $\mathbf{R_N}$ 将具有特殊的经济涵义。此时，$\tilde{\phi}_X(x,dF_X(x);a)$ 相当于对客观概率 $dF_X(x)$ 进行了主观调整，可以将 $\tilde{\phi}_X(x,dF_X(x);a)dF_X(x)$ 理解为主观概率。（3）式中的 $\tilde{\rho}(X;a)$，可以理解为随机变量 X 在主观概率下的风险测度，于是 $\mathbf{R_N}$ 可以简化为：

$$\mathbf{R_N}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\tilde{\phi}_X(x,dF_X(x);a)}{\tilde{\rho}(X;a)}(x-R_f)dF_X(x)=\frac{\tilde{E}(X-R_f)}{\tilde{\rho}(X;a)} \text{。} \tag{4}$$

（4）式中 $\tilde{E}$ 是主观概率下的数学期望算子。由（4）式定义的投资指数 $\mathbf{R_N}$，是在投资者个人的主观概率测度下单位风险可能带来的预期超额收益（相当于 Sharpe 比），可以用它来衡量风险效益。进一步可以比较一下，在 M-V 模型框架下所定义的投资指数 $\mathbf{R_N}$ 相对应的经济涵义。此时，我们取权重函数 $\phi(a,x,dF_X(x))=1/\sigma^2$ 时，投资指数 $\mathbf{R_N}$ 相应等于

$$\mathbf{R_N}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sigma^2}(x-R_f)dF_X(x)=\frac{E(X-R_f)}{\sigma^2} \text{。} \tag{5}$$

即在 M-V 模型框架下，投资指数 $\mathbf{R_N}$ 是在客观概率测度下，以方差为风险测度的单位风险所可能带来的预期超额收益。

（2）或（4）式定义了风险资产的投资指数，对于金融市场中具有重要而特殊意义的无风险资产，我们做出以下相应定义：

$$R_N=\frac{\tilde{E}(X-R_f)}{\tilde{\rho}(X;a)}=\frac{0}{0}=R_0,(R_0>0) \text{。} \tag{6}$$

$0<R_0<+\infty$ 具有特殊的经济涵义，它蕴涵着这样一个事实：对于一个理性的投资者，1）他不会为了负超额收益而冒风险 $(R_0 \not< 0)$；2）他不会为了有限的收益而冒无穷大的风险 $(R_0\neq 0)$；3）市场上也不存在无穷大的超额收益或无风险超额收益 $(R_0<+\infty)$。当投资指数 $\mathbf{R_N}$ 小于某一心理阀值时，投资者将放弃投资风险资产，转而投资无风险资产，此心理阀值即为 R_0。无风险资产在投资者投资过程中充当了基准参考点。

[7] 更一般地，(2)式中的权重函数 $\phi_X(x,dF_X(x);a)$ 起到了类似于等价鞅理论中的测度转换功能，经过它对资产分布的调整，将风险分布各异的资产去差异化，使得投资者可以通过对各风险资产 $\mathbf{R_N}$ 值的比较，形成自己的投资偏好集。

至此，我们定义了整个金融市场资产的投资指数 $\mathbf{R_N}$。根据 $\mathbf{R_N}$ 经济涵义，投资者可以通过对各风险资产的 $\mathbf{R_N}$ 值比较，按照 $\mathbf{R_N} > R_0$ 选择投资对象，以 $\mathbf{R_N}$ 大小来考虑投资的优先次序，从而形成自己的投资偏好集。

推论 1： 如果某风险资产的 $\mathbf{R_N} \le R_0$，那么投资者将不会投资于该风险资产。

$\mathbf{R_N}$ 为我们解决了投资决策过程的第一个问题——投资对象集的确定。

1.4 风险指数 I 构建

要确定投资对象集中各资产的头寸，形成最优投资组合，需要我们进一步研究风险敞口变化所带来风险效益的变化。投资者如果不持有某风险资产（风险暴露为 0），显然它不对投资组合产生任何实质风险。在这里我们用与自身的禀赋和拥有的风险资产量相关的投资比重 w，来刻画风险暴露。在研究 M-V 模型刻画效益风险与风险暴露关系的基础上（1.2 节内容），我们对投资者风险感受与风险暴露之间的关系做如下假设。

假设 1: 关于某一投资指数为 $R_N^i\ (> R_0)$ 的资产 i，投资者持有该资产所感受到的风险 $I(\cdot)$ 随风险暴露 w 的变化满足条件：1）$\dfrac{\partial I(\cdot)}{\partial w} > 0$ 和 2）存在与投资者风险属性相关的某一阀值 $m_a \in (0,1)$，使得

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 I(\cdot)}{\partial w^2} > 0, w < m_a \\ \dfrac{\partial^2 I(\cdot)}{\partial w^2} < 0, w > m_a \end{cases} \tag{7}$$

成立。

假设 1 中的一阶、二阶条件，分别刻画了现实世界中，投资者随风险暴露变化的风险感受。一阶条件大于 0，即投资者认为风险随风险暴露增大而增大（与 M-V 模型相同）；二阶条件下（先大于 0 后小于 0），以 m_a 为分界点，两边的风险都具有敏感性递减（diminishing sensitivity）特性，即投资者认为风险增大的速度随风险暴露的增大先慢慢变大，而后风险增大的速度又慢慢减小。风险暴露与投资者风险感受 **I** 关系如图 2 所示，这与 Kahneman 和 Tversky（1979）在不确定条件下的决策研究中，提出的“前景理论”中 ***S*** 型价值函数形状相似。***S*** 型的感受能较好地描述普遍存在于人们之中的那种对拥有量多少所带来的非线性感受。

假设 2： 对于持有的无风险资产，投资者所感受到的风险 I_0 不随持有的权重 w 变化。

这个假设基于无风险资产的无风险性，持有的无风险资产权重大小不对该部分的特殊风险 I_0 产生影响。

由推论 1 可知，投资者的风险资产投资集是 $\{R_N : R_N \ge R_0\}$，因此在考虑风险暴露 w 与投资者风险感受时，将以 $\{R_N : R_N \ge R_0\}$ 为 $\mathbf{R_N}$ 的定义域，表示由无风险资产和风险资产组成的投资集。这与人们在投资风险资产时，期待比无风险收益更高的回报事实相符。

结合上述分析和假设，定义可以衡量投资价值和风险大小的指数 **I**。根据它的经济涵义，

将其称之为风险指数。

定义 2（风险指数 I）：

$$I(R_f, R_N, w, a) = \{\frac{1}{\pi}\arctan[c(a)\tan(\pi(w-0.5))] + 0.5\} / R_N \tag{8}$$

式中：

w：某一金融资产占总投资比重（风险暴露）；

R_N：由（2）式计算得到的投资指数，$\{R_N : R_N > R_0\}$；

a：投资者的风险厌恶度；

$c(a)$：变形系数。

$c(a)$ 的大小决定了风险暴露给投资者带来的不同类型的风险感受(如图 3 所示)。

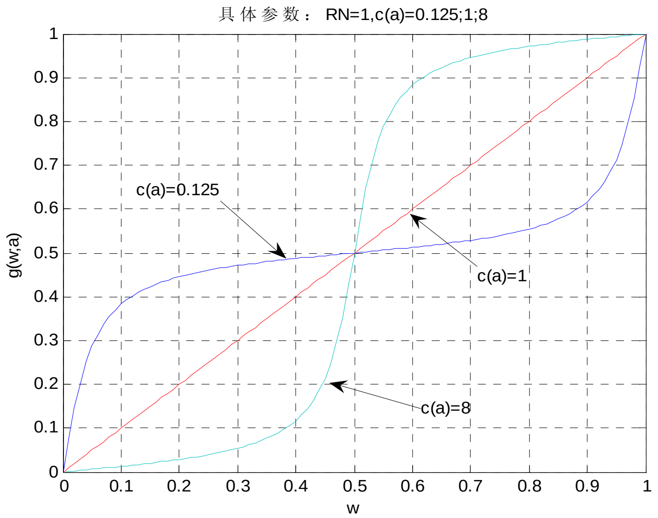

图 3 w 与 $g(w;\alpha)$ (或风险指数 I)之间的关系

由假设 2 可知，无风险资产的风险指数 I_0 与风险暴露 w 无关，具有其自身的特殊性[8]。

记 $g(w;\alpha) = \frac{1}{\pi}\arctan[c(a)\tan(\pi(w-0.5))] + 0.5$，在定义域 $\{R_N : R_N \geq R_0\}$ 上的风险指数可归纳为：

$$I(R_f, R_N, w, a) = \begin{cases} g(w;\alpha)/R_N & R_N > R_0 \\ I_0 & R_N = R_0 \end{cases} 。\tag{9}$$

风险指数 **I** 的数值的大小，代表了风险的大小和投资价值。人们追求风险系数小（投资价值大）的资产进行投资。风险指数 **I** 也兼具有效用函数的一些经济性质——**I** 相等的资产对投资者无差异。由（8）式可知，当 $w = 0$ 时，$I = 0$ 为最小值，人们似乎可以通过“零”

[8] 可以证明，无风险资产风险指数 I_0 和投资组合的预期超额收益 $\overline{u}$，都与个人的风险属性 a 相关，存在某种关系。在 M-V 模型中，R_0 与 $\overline{u}$ 的关系满足：$I_0 = \overline{u}/(r^T V^{-1} r)$，其中 r 是由风险资产预期超额收益率组成的列向量，V 是风险资产的协方差矩阵。在 M-V 模型中，当投资者对投资组合的收益有预期 $\overline{u}$ 时，就隐性的给定了风险指数 I_0。在本文中不给出具体的定义式，这不影响最优投资组合的求解。

($w=0$)投资策略来达到最优，但常常又事与愿违无法做到[9]。当 $w=1$ 时，$I=1/R_N$，此时的风险指数 I 就是单位超额收益下的风险。当 $c(a)=1$ 时，$g(w;\alpha)=w$，$I=w/R_N$，与 Markowitz 刻画的直线型的风险感受相一致；当 $c(a)>1$ 时，风险感受呈“*S*”型；当 $c(a)<1$ 时，风险感受呈反“*S*”型，$c(a)$ 刻画了不同风险偏好的投资者。风险指数 I 在具有良好特性的同时，为我们提供了刻画非线性风险感受的手段。

1.5 R_N&I 模型最优解

命题 1：假设投资者可以以相同的无风险利率借贷，预期的组合超额收益为 $\bar{u}$，有 N 个超额收益率为 $r_i(i=1,2,\cdots,n)$、风险指数 $R_N^i \geq R_0$ 的资产 X_i 和无风险资产 X_0 入选投资对象。那么，当 $(w_1,w_2,\cdots w_n)^*$ 满足条件：

1） $\sum_{i=1}^{n} w_i r_i = \bar{u}$ 和

2） $I_p = I_1 = I_2 = \cdots = I_n$

时，投资组合 $(1-\sum_{i=1}^{n} w_i, w_1, w_2, \cdots w_n)^*$ 就是最优投资组合。

上述的结论是显而易见的，因为命题 1 事实上是最小化风险/收益或最大化收益/风险（**Sharpe ratio**）的一种论述，等价于 Markowitz 均值－方差最优化。在满足预期收益目标 $\bar{u}$ 条件下，当组合中所有资产的风险指数相等(无差异)时达到最优。

$$\begin{cases} I_p = \{\frac{1}{\pi}\arctan[c(a)\tan(\pi(w_1-0.5))]+0.5\}/R_N^1 \\ \vdots \\ I_p = \{\frac{1}{\pi}\arctan[c(a)\tan(\pi(w_i-0.5))]+0.5\}/R_N^i \\ \vdots \\ I_p = \{\frac{1}{\pi}\arctan[c(a)\tan(\pi(w_r-0.5))]+0.5\}/R_N^n \\ \sum_{i=1}^{n} w_i r_i = \bar{u} \\ w_0 = 1-\sum_{i=1}^{r} w_i \end{cases} \tag{10}$$

R_N&I 投资组合模型的最优投资组合求解步骤，可以分为以下几步：

---

[9] 这里隐含了一个前提条件，即投资者的投资额度($w=1$)必须全部用完，同时还要满足投资者的预期超额收益 $\bar{u}$ 。

1）用历史数据估算资产的收益分布（参数、非参数估计等方法）。

2）根据投资者个人的风险属性，确定无风险资产投资指数值 R_0，选用适当的权重函数 $\phi(a,x,dF_X(x))$，由（2）式计算各资产的投资指数值 $R_N^i(i=1,2,\cdots n)$。

3）根据投资者风险属性，确定变形系数 $c(a)$，由（9）式和命题 1 得到方程组（10）。

方程组（10）共有 n＋2 个方程和 n＋2 个 $(w_0,w_1,w_2,\cdots w_n;I_p)$ 未知数，在 $R_1\neq R_2\neq\cdots\neq R_n$（如果存在 $R_i=R_j(1\leq i\neq j\leq n)$，可以将资产 X_i、X_j 视为同一资产，进行合并）条件下，由反正切函数的单调性可知，存在唯一解 $(w_0,w_1,w_2,\cdots w_n;I_p)$。当 I_p 满足等式 $\sum_i\{\arctan[(\tan\pi(R_N^iI_p-0.5))/c(a)]/\pi+0.5\}r_i=\bar{u}$ [10]时，

$$w_i=\arctan[(\tan\pi(R_N^iI_p-0.5))/c(a)]/\pi+0.5, i=1,2,\cdots,n \tag{11}$$

就是最优化投资组合解析解，$\mathbf{I}_p$ 为投资组合的风险指数。

3　$\mathbf{R_N}$&I 模型与 M-V 模型的异同

本文模型与 M-V 模型既有不同之处，也有相似点。

1）本模型通过引入反正切三角函数和变形系数 $c(a)$，提供了刻画投资者对收益调整后的“*S*”型风险感受簇，是对 M-V 模型线性风险感受的一种扩展和补充。

2）对于一个 100 万的风险，拥有不同初始禀赋 90 万和 1 亿的两位投资者，显然对此风险感受是不同的。在 M-V 模型中，投资者的初始禀赋不对投资决策产生影响。在本文模型中，初始禀赋变量虽然没有直接进入投资指数和风险指数定义式中，但是它通过影响投资者的风险厌恶系数 *a* 而对投资决策产生影响。

3）M-V 模型在刻画风险时没有考虑风险具有隶属性，相当于做了市场投资者风险同质性（homogeneity）的假设。虽然在最后求解某一最优投资组合时，可以融入投资者异质性（heterogeneity）的效用函数，但是并不能改变风险不具有隶属性的缺陷。本文模型通过引入风险厌恶系数 *a*，弥补了 M-V 模型在刻画风险方面的不足，不过也增加了如何确定权重函数 $\phi(a,x,dF_X(x))$、变形系数 $c(a)$ 的困难。

4）虽然 **$\mathbf{R_N}$&I** 投资组合模型和 M-V 模型有众多的不同之处，但是只要对 **$\mathbf{R_N}$&I** 模型选择适当的权重函数和变形系数，经过去除主观性因素，**$\mathbf{R_N}$&I** 模型就可退化成 M-V 模型。因为在风险的刻画上，当 $\phi(a,x,dF_X(x))=1/\sigma^2$ 和 $c(a)=1$ 时，**$\mathbf{R_N}$&I** 模型刻画的风险与 M-V 模型完全一样。此时 $R_i=r_i/\sigma_i^2$、$I_i=w_i/R_N^i$，即为 M-V 模型所定义的风险暴露 w_i 下经超额收益调整后的风险 $w_i\sigma_i^2/r_i$（**Sharpe ratio** 的倒数）。同时，**$\mathbf{R_N}$&I** 模型和 M-V 模型在最优化投资组合的构建上也是完全一致的，即最小化风险/收益或最大化收益/风险（**Sharpe**

[10] 可以利用计算机迅速计算得到 I_p。

ratio）等价于均值－方差最优化，最终 $\mathbf{R_N\&I}$ 模型的最优解(11)式

$$w_i\,(c(a)=1)=R_N^i I_p=\frac{\bar{u}}{r^T V^{-1} r}(\sigma_i^2)^{-1} r_i \text{（} I_p=\bar{u}/(r^T V^{-1} r), i=1,2,\cdots,n \text{）}$$

也是 M-V 模型的最优解。

4 总结与展望

本文通过将投资决策分解为两个决策过程，构建了基于投资指数 $\mathbf{R_N}$ 和风险指数 **I** 的 $\mathbf{R_N\&I}$ 投资组合模型。本模型从投资者自身角度出发，解释了投资者投资行为，刻画了投资者选什么和选多少的投资决策过程，阐述了投资者形成最优投资组合的机理，为投资者提供了最优组合解。

与 M-V 模型，以及由此基础上发展出来的投资组合模型不同，本文从新的视角提供了一种新的思路和方法。本模型通过投资者风险厌恶系数 a，将投资者个人的差异带入到决策变量之中，同时引入反正切三角函数来刻画风险暴露给投资者带来的"$\boldsymbol{S}$"型风险感受，为复杂的非线性风险感受刻画提供了方法。

由于篇幅有限，本文的研究对象局限于风险中性和风险厌恶型的投资者（$a \geq 0$），同时没有考虑风险资产间的相关性[11]，更一般性的讨论有待于进一步展开。

参考文献：

[1] Daniel Kahneman, Amos Tversky. Prospect theory: An analysis of decision under risk. Econometrica [J]. 1979, Vol.47, 263-291.

[2] Harry M. Markowitz. Portfolio selection. The Journal of Finance [J]. 1952, Vol.7, 77-91.

A New Portfolio Model Based on Investment Index $\mathbf{R_N}$ and Risk Index I

Zhang Shengping　　Wu Chongfeng

(Financial Engineering Center of Shanghai Jiaotong Univ., Shanghai 200052, China)

Abstract: This paper made a new portfolio model named $\mathbf{R_N\&I}$ Portfolio Model that based on the investment index $\mathbf{R_N}$ and the risk index **I**. $\mathbf{R_N\&I}$ Portfolio Model characterizes the behavior of investment decision and elucidates the optimum portfolio mechanism. We firstly applied the arc tangent function to characterize investors' risk feeling about the risk exposure, and united the risk with utility which made $\mathbf{R_N\&I}$ portfolio model with some good properties. Different from the Markowitz Mean-Variance model, $\mathbf{R_N\&I}$ Portfolio Model is a new method to solve the optimum portfolio problem under subjective probability measures.

Key words: investment index $\mathbf{R_N}$; risk index **I**; $\mathbf{R_N\&I}$ portfolio model; optimum portfolio;

作者通讯地址：上海市法华镇路 535 号上海交通大学管理学院南楼 303，邮编：200052。

联系电话：（021）52301087　13795361208。

E-mail：shpzhang1979@gmail.com。

[11] 考虑相关性的建模，作者另有拙文。