

中美股票市场的跳跃自兴奋与波动率集聚特征*

——基于序贯贝叶斯参数学习方法

朱福敏^{1,2}, 吴恒煜^{1,3}, 魏相育³

(1, 西南财经大学, 中国金融研究中心, 中国金融安全协同创新中心, 四川, 成都, 611130; 2. 深圳大学, 经济学院, 广东, 深圳, 518000; 3. 西南财经大学, 经济信息工程学院, 四川, 成都, 611130.)

摘要: 跳跃和波动率不对称性是金融市场资产价格收益率的重要特性。本文用时变跳跃强度和随机扩散波动率的双因子模型解释标准普尔 500 和沪深 300 指数的跳跃和扩散之间的相互影响和反馈机制, 并采用序贯蒙特卡罗模拟的参数学习对模型参数进行了估计。研究结果表明: 1) 跳跃和扩散存在明显的自兴奋和聚集现象, 跳跃和扩散对跳跃强度和波动率的冲击都会产生持续性影响; 2) 随机因子对时变跳跃强度和扩散波动率都具有非对称的反馈作用, 即负向冲击对跳跃和扩散的反馈影响大于正向冲击对跳跃和扩散的反馈影响; 3) 跳跃的风险溢价高于扩散的风险溢价, 跳跃在影响资产收益定价过程中起着更重要的作用; 4) 对运作机制和参与者不同的市场, 跳跃和扩散的相互反馈影响有不同的表现。

关键字: 跳跃自兴奋; 波动率聚集; 不对称回馈; 序贯参数学习

Jump self-exciting and volatility clustering in H&S300 and S&P500: A sequential Bayesian learning approach*

Fumin ZHU^{1,2}, Hengyu WU^{1,3}, Xiangyu Wei³

(1. Institute of Chinese Financial Studies, Collaborative Innovation Center of Financial Security of China, SWUFE, Chengdu 611130, China; 2. Department of Economics, Shenzhen Univ., Shenzhen 518000, China; 3. School of Economic Information Engineering, SWUFE, Chengdu 611130.)

Abstract: Asymmetric volatility feedback and jump behavior are key characteristics of the assets in financial market. This paper proposes a bi-variate and co-movement dynamics for time-varying jump intensity and stochastic continuous volatility to jointly model the volatility clustering and self-exciting jumps using the CSI 300 Index and S&P 500 Index. We employ sequential Bayesian Monte Carlo methods to calibrate the model and estimate the model's latent states with posterior parameters jointly. We find that, the impact from jump and diffusion will give asymmetric feedback to jump intensity and diffusion volatility. Jumps and diffusion both asymmetrically give persistent feedback to volatility and jump intensity, and negative shocks will give much bigger impacts on risks. Jump performs a much more important role in evaluating the risk and premium of an asset. And the across-impact acts differently on different indices.

Key words: Jump clustering; volatility feedback; leverage effect; sequential Bayesian learning.

***基金项目:** 国家社会科学基金重大项目(91218301)、国家自然科学基金项目(71171168)、国家社会科学基金重点项目(11AZD077)、西南财经大学中央高校基本科研业务费专项资金(JBK120505, JBK130214, JBK130401)和西南财经大学中央高校科研业务费专项资金及四川省教育厅创新团队项目(JBK130401)。

作者简介:

朱福敏(1985-), 男, 江西赣州人, 管理学博士, 研究方向: 金融工程, 金融计量; 吴恒煜(1970-), 男, 广东雷州人, 中国金融安全协同创新中心专职研究人员, 西南财经大学中国金融研究中心和经济信息工程学院教授、博士生导师, 研究方向: 金融工程, 金融经济学; E-mail:wuhengyu@163.com; 魏相育(1992-), 女, 甘肃兰州人, 金融学硕士, 研究领域: 金融工程与资产定价。

0 引言

资产价格收益率的波动和跳跃是金融领域研究的重点和难点问题之一。资产收益存在明显的扩散、**跳跃和随机**波动现象，即证券价格由连续的扩散过程、无限的跳跃部分组成。同时，资产收益的波动率也存在三个显著的特点：①资产收益的波动率是时变而且持续的；②资产收益在某些时间段内会产生大规模、大幅度的聚簇的变化，表现为资产收益的跳跃聚集和自兴奋行为；③资产收益负向的冲击会对**未来波动**产生相对正向冲击更大的作用，即波动率的非对称反馈作用或**杠杆效应**。为了量化上述金融市场中的**波动率集聚与跳跃自兴奋特征**，本文提出了**双因子跳跃-扩散模型**，用以研究资产收益率的**波动率反馈、跳跃强度的持续性及相应的风险溢价**。该模型在假设**资产价格具有两个随机因子的基础上**，同时考虑波动率**杠杆效应**，并分别刻画跳跃强度和扩散波动率对跳跃和扩散的**反馈作用**。跳跃自兴奋会驱动跳跃强度和扩散波动率分别对跳跃和扩散产生**持续性影响**，同时，跳跃和扩散也会反过来对跳跃强度和扩散波动率产生反馈作用。这种跳跃强度和扩散波动率与跳跃和扩散之间的相互反馈影响，可以更全面地反映资产收益率的**演变特征**。本文将建立双因子的跳跃-扩散模型来反映跳跃和扩散以及跳跃强度和扩散波动率之间的双向非对称反馈影响机制，并用序贯蒙特卡罗参数学习的方法对模型进行估计，研究标准普尔 500 和沪深 300 指数收益率的跳跃和扩散的相互影响反馈作用。

1 文献综述

Press^[1]指出证券价格的对数收益率不一定服从稳态正态分布，而是应该服从可以刻画金融资产收益率尖峰厚尾现象的泊松正态混合分布，同时证券的对数价格可以分解为两个独立的部分，一是服从几何布朗运动所导致的连续扩散部分，二是由超预期信息主导使证券价格偏离几何布朗运动而发生的跳跃部分。即资产价格收益率不仅有明显的扩散过程，还由**非连续**的跳跃行为组成。Todorov 等^[2]的实证研究表明波动率和收益率是相互独立的，而且波动率是带无穷跳跃的连续鞅过程。Eraker 等^[3]用带有跳跃的连续状态的随机波动率模型进行 S&P500 以及 Nasdaq100 数据的研究发现波动率和收益率都有明显的跳跃特征，这种现象被称为收益率和波动率的联跳现象（co-jump）。同时，Eraker 等人的实证结果还表明，在刻画较不稳定的数据时，跳跃的贡献程度更显著，即跳跃的风险溢价高于扩散的风险溢价。Christoffersen 等^[4]建立了时变跳跃强度的离散时间模型，进一步证实了跳跃动态过程的风险溢价高于波动率动态过程的风险溢价。在研究跳跃测度方面，有限跳跃模型如 Kou^[5]建立的双指数模型虽然能够捕捉资产价格的重大突变，但无法捕捉市场存在的大量高频率小跳跃，Carr 等^[6]引入无穷跳跃的 Levy 过程用以捕捉任意时间内发生的无限次的跳跃，Variance Gamma^[7]过程是一个刻画资产收益率随机波动的具有时变 Gamma 独立增量过程的方差过程，该过程所具有的布朗运动扩散组成部分和时变波动率过程能够很好地表现资产收益率波动的尖峰厚尾的特点。Li^[8]，A ĩ-sahalia^[9]和 Lee^[10]等人的实证研究表明，Variance Gamma 过程比一般的仿射泊松跳跃模型更能捕捉市场证券收益的跳跃动态过程。

资产价格与波动率之间存在负向的关系，资产价格的下降会导致波动率的上升。Black^[11]和 Christie^[12]是最早研究证实收益率的波动率的不对称性的，他们将这种实证现象称为波动率的非对称（asymmetric volatility）现象，并提出了两种解释波动率不对称的理论：杠杆效应假说和波动反馈效应假说。杠杆效应假说认为收益率负向的变动增加了风险，导致金融杠杆的产生，从而加剧了股票价格的波动；波动反馈效应认为波动率的增加会提升投资者对股票较高收益的需求，进而导致收益率的下降。Guojun Wu^[13]用模拟的方法验证了波动率回馈

的存在，并证实了杠杆效应和波动率反馈都是非对称波动率的重要决定因素。陈千里^[14]的实证研究表明中国股市波动的聚集性和不对称性是显著的。张维等^[15]借鉴行为金融理论中关于前景理论的研究成果，构造了一类基于前景理论决策框架的投资者，并在此假设基础上推导出相应的资产价格均衡模型，该模型通过数值模拟的方法验证了波动不对称性，即在利空消息更频繁出现的市场中，相对于利好消息对价格的向上推动作用，利空消息的到达对价格下挫的影响表现得更加突出。

资产价格变动还具有持续性，表现为波动率的较大的振动通常会持续一段很长的时间，即波动性不仅在某一时间段连续出现偏高或偏低的现象，而且当期较高的波动会引起下一期较大的波动，并会随着当期收益率偏离均值的程度而加强或减弱。李亚静等^[16]根据 Granger 关于序列长记忆性的定义研究证实中国股市收益率和波动性具有长记忆性，而且股票价格较大的波动对其后相当长的时间内的收益率走势在一定程度上都有或多或少的影响。资产价格收益率的跳跃行为不仅呈现聚集、自兴奋以及长记忆性的特点，条件波动率对跳跃产生显著的反馈效应。陈浪南等^[17]用混合 GARCH 跳跃模型 ARVI-GARCH-Jump 对上证综指、香港恒生指数等指数的实证研究表明指数在较高的条件波动率期间，倾向于具有较高的跳跃强度和跳跃发生事后概率。同时，跳跃行为对波动率预期存在显著的回馈效应，跳跃行为引致的扰动，对波动率预期产生持续滞后的影响。并且，跳跃行为对波动率预期的回馈效应是非对称的，关于消息冲击的正负方向是敏感的。Hsieh 等^[18]用实证表明 NGARCH 模型在刻画波动率非对称方面有比 GARCH 模型更良好的表现，即便是在模型的参数长时间没有得到更新的情况下。任枫等^[19]验证了用 MCMC 工具对类似于非对称双指数跳跃扩散等含有隐含变量的多参数模型估计的有效性，同时模拟实验表明非对称双指数跳跃扩散模型能够体现资产收益分布的尖峰厚尾以及有偏等特征。

Carr 等^[20]的研究指出波动率和收益率之间除了具有杠杆效应之外，还独立地存在波动率回馈，即利空的冲击相比利好的冲击对收益率的影响效力更大，作用强度更强。市场中资产价格收益率较大的冲击经常会产生跳跃自兴奋的状态，一次强度较高的跳跃往往会带动产生一系列较小强度的跳跃。Fulop 等^[21]提出了跳跃自兴奋资产定价模型，该模型考虑到了收益率和波动率的联跳现象和跳跃的自兴奋聚集情况，同时用贝叶斯参数学习对模型的参数进行估计显示 1987 年美国金融危机股票收益率存在跳跃聚集自兴奋现象，且该现象在 2008 年全球金融危机时段表现更明显。Fulop 等人的研究还发现，资产收益率负向的跳跃可以同时影响收益波动率和跳跃强度产生反馈作用，因此可以通过波动率和跳跃强度的变化估算未来发生极端事件的似然信息。

除此之外，Fulop 等^[22]人的众多实证研究表明，用粒子滤波的参数学习方法不仅能估计波动率自兴奋跳跃等模型的参数和隐含变量的值，还能很好地解决参数不确定和样本内过拟合问题。Doucet^[23]提出解决滤波问题和固定阶平滑问题的粒子滤波方法，这种用到了序贯重要抽样法和马尔科夫蒙特卡罗技术的方法，能够很好地解决跳跃线性马尔科夫系统的解的问题。Creal^[24]指出序贯参数学习能够解决非线性非高斯模型不存在解析积分分解的问题，并指出粒子滤波方法的应用在风险管理、期权定价以及高频计量的模型估计中扮演着重要的角色。

在上述文献考虑跳跃聚集和波动率反馈的基础上，本文建立了刻画资产收益率跳跃自兴奋和波动率聚集的双因子 N-GARCH 模型，该模型包括三个特点：①跳跃和扩散波动率有相互反馈机制，即跳跃可以影响扩散波动率，扩散波动率也会对跳跃产生一定的影响；②不仅波动率存在杠杆效应，跳跃自身也存在非对称反馈，表现为负向的冲击会对波动率和跳跃强度产生更多的作用力；③跳跃和波动率所代表的风险因子具有不同的风险溢价，跳跃的风险溢价要高于波动率的风险溢价。由于模型的非高斯非线性性质，本文还讨论了序贯贝叶斯蒙特卡罗参数学习的方法，并进行了实证研究，估计了模型的隐含变量和先验参数等信息。

本文的主要内容安排如下：第二部分，建立包括扩散和无限跳跃 VG 过程的时变动态跳跃扩散模型来刻画跳跃和波动率自兴奋反馈的特性；第三部分，解释模型校准所用到的序贯贝叶斯蒙特卡罗模拟方法；第四部分，用贝叶斯参数学习方法对标准普尔 500 指数和沪深 300 指数的跳跃自兴奋和波动聚集的参数进行估计和分析；第五部分为本文的结论。

2 跳跃聚集和波动率非对称反馈模型

2.1 动态的时变跳跃-扩散模型

根据 Aï-sahalia^[9]，Lee^[10]和 Fulop^{[21][22]}等，动态的跳跃-扩散半鞅模型可以表示为：

$$dL_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t + x_t dJ_t \quad (1)$$

其中， x_t 表示 t 期的随机跳跃强度， W_t 表示 Winner 扩散过程， J_t 是 VG 模型中跳跃的次数，这里假设 W_t 和 J_t 相互独立； dJ_t 表示时间区间 dt 上已实现的跳跃的达到率。（1）式是时变 Levy 过程的一种表示方法，表明收益率受到两种不同类型的冲击：一种是由布朗运动刻画的持续的小幅度的冲击，连续扩散的波动率为 σ_t ；另一种是由跳跃组成部分刻画的大的持续的冲击，用 $x_t dJ_t$ 表示。

（1）式中的跳跃组成部分由 Madan^[7]等人的 Variance Gamma 过程刻画。Variance Gamma 过程是无限跳跃 Levy 过程的一种方式，可以表示为：

$$J_t = \mu_J \dot{\Gamma}_t + \sigma_J \tilde{W}(\dot{\Gamma}_t) \quad (2)$$

其中 \tilde{W} 服从标准布朗运动， $\dot{\Gamma}_t$ 是一个具有单位均值和 ν 方差的 Gamma 因子，即： $\dot{\Gamma}_t = \Gamma(t; 1, \nu)$ 。（2）式中 μ_J 是随机跳跃幅度的均值， σ_J 是随机跳跃幅度的方差。市场中证券收益率会受到正向冲击和负向冲击，所以可以将跳跃分解为正向的跳跃部分 J_t^+ 和负向的跳跃部分 J_t^- ，即有：

$$\begin{aligned} J_t &= J_t^+ + J_t^- \\ &= \Gamma_u(t; \mu_u, \nu_u) - \Gamma_d(t; \mu_d, \nu_d) \end{aligned} \quad (3)$$

Γ_u 是均值为 μ_u ，方差为 ν_u 的刻画收益率正向跳跃过程的 Gamma 过程， Γ_d 是均值为 μ_d ，方差为 ν_d 的刻画收益率负向跳跃过程的 Gamma 过程，并且有：

$$\mu_u = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\mu_J^2 + 2\sigma_J^2/\nu} + \mu_J \right), \quad \nu_u = \mu_u^2 \nu, \quad (4)$$

$$\mu_d = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\mu_J^2 + 2\sigma_J^2/\nu} - \mu_J \right), \quad \nu_d = \mu_d^2 \nu, \quad (5)$$

2.2 跳跃和扩散的风险溢价

用 h_t 代表已实现跳跃强度，**离散形式下**，半鞅过程的收益率可以表示为：

$$y_t = \ln S_t - \ln S_{t-1} = \mu_t - \Phi_x(h_t) - \frac{\sigma_t^2}{2} + x_t h_t + \sigma_t z_t \quad (6)$$

这里， z_t 为扩散项的随机因子，服从标准正态分布， $\Phi_x(h_t)$ 是跳跃随机因子的矩母指数，用以进行凸度修正，使该随机过程成为一个指数鞅。

上式将资产收益率分解为三部分，①来源于资产的时间价值（或者无风险利率）；②来源于跳跃对资产收益率冲击的风险溢价；③来源于扩散波动率对资产收益率冲击的风险溢价。则资产收益率可表示如下（7）式：

$$\mu_{t+1} = r_{t+1} + \lambda_J h_{t+1} + \lambda_D \sigma_{t+1} \quad (7)$$

其中， λ_J 表示跳跃的市场溢价， λ_D 表示扩散的市场溢价。

2.3 跳跃自兴奋、波动率聚集及非对称反馈模型

参考具有杠杆效应的 **NGARCH** 这类非对称的广义条件异方差模型，我们推广至双因子交互结构，对连续的波动率和时变的跳跃强度进行建模，离散化下反映跳跃聚集和波动率回馈的风险测度模型可写为：

$$\begin{bmatrix} h_{t+1}^2 \\ \sigma_{t+1}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{10} \\ \alpha_{20} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_t^2 \\ \sigma_t^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_t^2 (x_t - \gamma_J)^2 \\ \sigma_t^2 (z_t - \gamma_D)^2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$V_t = \sigma_t^2 + h_t^2 \sigma_J^2 \quad (9)$$

其中， α_{10} 、 α_{20} 分别为跳跃强度和扩散波动率的截距项， β_{11} 、 β_{12} 表示跳跃强度所受到的来自跳跃和扩散的影响的**回归**系数， β_{21} 、 β_{22} 表示扩散波动率所受到的来自跳跃和扩散的**回归**系数； γ_J 、 γ_D 分别表示跳跃和扩散波动率的非对称反馈系数，则 α_{11} 、 α_{12} 以及 α_{21} 、 α_{22} 分别表示跳跃和扩散以及跳跃强度和扩散波动率之间反馈作用的系数。 V_t 代表**收益率**的**总方差**。

A ĩ-sahalia^{[9][25]}和 Carr^[20]以及 Fulop^{[21][22]}等的研究已经解释了资产收益的波动受到两方面的影响反馈，一方面来自跳跃强度的冲击，另一方面来自扩散波动率的冲击。即①资产收益率负向变动的冲击加强了跳跃强度的变化，进而刺激未来收益率的变化，对收益率产生反

馈影响；②资产收益率负向变动加剧了收益率波动率的变化，这种极强的波动率变化对未来收益率产生反馈影响。（8）式所表示的模型不仅包括跳跃强度和扩散波动率对跳跃和扩散的反馈影响作用，还解释了跳跃和扩散对跳跃强度和扩散波动率的影响：①跳跃强度的变化刺激收益率的变动，收益率的变化又会以类似的作用机制但是不同的作用强度反馈给跳跃强度，对跳跃强度产生影响；②扩散波动率也以相同的机制受到收益率变化的反馈，表现为扩散对扩散波动率的影响。

将上述模型跳跃和扩散以及跳跃强度和扩散波动率之间相互交叉反馈影响的作用机制进行分解，并写成向量形式，用以量化状态向量的自回归和信息冲击的反馈效应。若用 V_t 表示跳跃强度和扩散波动率的风险测度，即 $V_t = (h_t, \sigma_t)'$ ，用 X_t 表示跳跃和扩散的联动影响，即 $X_t = (x_t, z_t)'$ ，则跳跃和扩散的联合风险测度可以表示为：

$$V_{t+1} = C + BV_t + AG(V_t, X_t) \quad (10)$$

其中， A 和 B 分别表示跳跃和扩散的反馈和自兴奋聚集关系， $G(V_t, X_t)$ 表示跳跃强度和波动率反馈的非对称性。

B 表示跳跃强度和扩散波动率的聚集情况，反映向量的自回归效应，可将 B 表示为如下 2×2 的矩阵形式：

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \quad (11)$$

其中， B_{11} 表示跳跃对跳跃强度冲击的持续性， B_{12} 表示扩散对跳跃强度冲击的持续性， B_{21} 表示跳跃对扩散的波动率冲击的持续性， B_{22} 表示扩散对扩散的波动率冲击的持续性。

根据跳跃-扩散双因子波动率模型的平稳条件，整个状态空间收益率所受冲击的持续性 B_{all} 可以表示为：

$$B_{all} = B_{11} + B_{22} - B_{11}B_{22} + B_{12}B_{21} \quad (12)$$

跳跃和扩散之间的相互反馈可用 2×2 矩阵 A 来表示：

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad (13)$$

其中， A_{11} 表示跳跃对跳跃强度的反馈， A_{12} 表示扩散对跳跃强度的反馈， A_{21} 表示跳跃对扩散的波动率的反馈， A_{22} 表示扩散对扩散的波动率的反馈，并定义 A_{11} 和 A_{22} 为跳跃和扩散的自反馈， A_{12} 和 A_{21} 为跳跃和扩散的交叉反馈。

基于平稳性条件，跳跃和扩散对不同风险测度的反馈 $\{A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}\}$ 可以表示为

$$\begin{cases} A_{11} = \alpha_{11} [\sigma_J^2 + (\mu_J - \gamma_J)^2] \\ A_{12} = \alpha_{12} [\sigma_D^2 + (\mu_D - \gamma_D)^2] \\ A_{21} = \alpha_{21} [\sigma_J^2 + (\mu_J - \gamma_J)^2] \\ A_{22} = \alpha_{22} [\sigma_D^2 + (\mu_D - \gamma_D)^2] \end{cases} \quad (14)$$

其中， μ_J 和 σ_J 表示随机跳跃幅度 x_t 的均值和方差， μ_D 和 σ_D 表示扩散 z_t 的均值和方差，特别的 $t=0$ 时，扩散的均值 $\mu_D = 0$ 方差 $\sigma_D^2 = 1$ 。

(14) 式的证明如下：

跳跃强度和扩散波动率的条件期望可以表示为：

$$\begin{aligned} h_{t+1}^2 &= A_{10} + B_{12}\sigma_t^2 + B_{11}h_t^2, \\ \sigma_{t+1}^2 &= A_{20} + B_{21}h_t^2 + B_{22}\sigma_t^2 \end{aligned} \quad (15)$$

联立上述方程组，跳跃强度和扩散波动率的无条件期望（长期期望）为：

$$h^2 = \frac{A_{10}(1-B_{22}) + A_{20}B_{12}}{(1-B_{11})(1-B_{22}) - B_{12}B_{21}} \quad (16)$$

$$\sigma^2 = \frac{A_{20}(1-B_{11}) + A_{10}B_{21}}{(1-B_{11})(1-B_{22}) - B_{12}B_{21}} \quad (17)$$

其中，系数关系为：

$$A_{10} = \alpha_{10}, \quad A_{20} = \alpha_{20} \quad (18)$$

$$\begin{cases} B_{11} = \beta_{11} + \alpha_{11} [\sigma_J^2 + (\mu_J - \gamma_J)^2] \\ B_{12} = \beta_{12} + \alpha_{12} [\sigma_D^2 + (\mu_D - \gamma_D)^2] \\ B_{21} = \beta_{21} + \alpha_{21} [\sigma_J^2 + (\mu_J - \gamma_J)^2] \\ B_{22} = \beta_{22} + \alpha_{22} [\sigma_D^2 + (\mu_D - \gamma_D)^2] \end{cases} \quad (19)$$

$$B_{all} = B_{11} + B_{22} - B_{11}B_{22} + B_{12}B_{21} \quad (20)$$

根据方差和已实现跳跃强度的有界性，无条件期望应该满足如下条件：

$$\begin{aligned}
A_{10} &\geq 0, B_{11} \geq 0, B_{12} \geq 0, \\
A_{20} &\geq 0, B_{22} \geq 0, B_{21} \geq 0, \\
0 &< 1 - B_{11} \leq 1, 1 < 1 - B_{22} \leq 1, \\
0 &< (1 - B_{11})(1 - B_{22}) - B_{12}B_{21} \leq 1
\end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}
1 - B_{11} &\geq (1 - B_{11})(1 - B_{22}) - B_{12}B_{21}, \\
1 - B_{22} &\geq (1 - B_{11})(1 - B_{22}) - B_{12}B_{21}
\end{aligned} \tag{22}$$

3 序贯贝叶斯参数学习

第二部分建立了相互反馈影响的跳跃-扩散模型，本文进一步引入参数学习方法估计动态模型。根据 Creal^[24]，Doucet^[26]以及吴恒煜等^{[27][28]}人的实证研究，参数学习能够解决非线性、非高斯且多维模型不存在解析及分解的问题。

3.1 序贯蒙特卡罗方法

序贯蒙特卡罗（SMC）也称粒子滤波，是一种通过蒙特卡罗模拟解决序贯贝叶斯估计问题的方法，在非高斯非线性且多维的状态空间测量中，采用模拟的办法在数值上逼近一个无法计算的密度积分问题^{[27][28]}。

根据 Creal^[24]的研究，用 y_t ， x_t 分别表示 t 时刻的观测变量和状态变量， Θ 为状态空间模型的参数。将观测变量的序列记为 $y_{1:T} = \{y_1, \dots, y_T\}$ ，状态变量序列 $x_{0:T} = \{x_0, \dots, x_T\}$ 通常是不可直接观测的，但可以通过观测数据估计到。 t 时刻状态的联合后验密度为：

$$p(x_{0:t} | y_{1:t}; \Theta) = \frac{p(y_{1:t}, x_{0:t}; \Theta)}{p(y_{1:t}; \Theta)} = \omega_{1:t} \tag{23}$$

其中， $p(y_{1:t}; \Theta)$ 是状态空间模型的似然函数。这个联合后验密度的计算可以通过 t 时刻的边际滤波密度得到迭代式：

$$\omega_{1:t} = \omega_{1:t-1} \frac{p(y_t | x_t; \Theta) p(x_t | x_{t-1}; \Theta)}{p(y_t | y_{1:t-1}; \Theta)} \tag{24}$$

表明联合密度可以表示为一系列序贯贝叶斯密度的乘积。

在不容易获得状态方程相应的密度的时候，可以用重要性抽样（importance sampling）的方法获得贝叶斯法则下的粒子的后验权重。即当 $p(x_{0:t} | y_{1:t})$ 在真实测度中无法计算时，往往寻找一个替代分布进行重要性样本的抽样，这个重要性分布称为推荐分布（proposal distribution），假设该推荐分布的密度函数为 $q_{0:t}(x_{0:t} | y_{1:t})$ ，从中抽取 N 个状态粒子 $\{x_{0:t}^{(i)}\}_{i=1}^N$ ，

那么这些粒子的重要性权重 $\{\omega_t^{(i)}\}_{i=1}^N$ 为:

$$\omega_t^{(i)} = \frac{p(x_{0:t}^{(i)}|y_{1:t})}{q_{0:t}(x_{0:t}^{(i)}|y_{1:t})} \quad (25)$$

对其标准化, 有:

$$\bar{\omega}_t^{(i)} = \frac{\omega_t^{(i)}}{\sum_{j=1}^N \omega_t^{(j)}} \quad (26)$$

此时, 状态的估计值为:

$$\hat{f}(x_{0:t}) = \sum_{i=1}^N f(x_{0:t}^{(i)}) \bar{\omega}_t^{(i)} \quad (27)$$

同理可得联合重要权重的迭代关系:

$$\omega_t \propto \omega_{t-1} \cdot \omega_{t|t-1} \quad (28)$$

t 时刻条件序贯重要性权重 $\omega_{t|t-1}$ 为:

$$\omega_{t|t-1} \propto \frac{p(y_t|x_t)p(x_t|x_{t-1})}{q(x_t|y_t, x_{0:t-1})} \quad (29)$$

3.2 粒子滤波下的参数学习

如上所述为参数分布已知条件下的粒子滤波, 若参数分布未知, 则可以通过贝叶斯参数学习的方法, 结合 MCMC (Markov Chain Monte Carlo) 抽样方法, 并使用粒子滤波技术估计参数和状态的联合密度, 具体方法参见 Andrieu^[29]。

假设状态的后验密度为 $p_\theta(x_{0:t}|y_{1:t}, \theta)$, 则参数和状态的联合后验密度 $p_\theta(\theta, x_{0:t}|y_{1:t})$ 之间的关系可表示为:

$$p_\theta(\theta, x_{0:t}|y_{1:t}) = p_\theta(x_{0:t}|y_{1:t}, \theta)p(\theta|y_{1:t}) \quad (30)$$

其中, $p(\theta|y_{1:t}) \propto p(y_{1:t}|\theta)p(\theta)$, 在 $p_\theta(x_{0:t}|y_{1:t}, \theta)$ 可以根据粒子滤波估计的基础上, 便可以获得 $p(\theta|y_{1:t})$, 并结合 Metropolis-Hastings 算法计算接受率, 反复进行更新, 可以改进参数估计。

假设序贯抽样得到 M 个服从先验分布 $p(\theta^{(m)})$ 的参数粒子, 即: $\{\theta^{(m)}\}_{m=1}^M$, 在固定参数 $\theta^{(m)}$ 下进行序贯蒙特卡罗估计, 得到状态粒子的重要性权重 $p_\theta(x_{0:t}|y_{1:t}; \theta^{(m)})$, 并计算抽样

参数的似然函数 $\omega(\theta^{(m)})$ ，即

$$\omega(\theta^{(m)}) = p(\theta^{(m)} | y_{1:T}) = \prod_{i=1}^N p_{\theta}(x_{0:T}^{(i)} | y_{1:T}; \theta^{(m)}) \quad (31)$$

此时，经过标准化后，每一个参数的重要性权重为：

$$\bar{\omega}(\theta^{(m)}) = \omega(\theta^{(m)}) / \sum_{n=1}^M \omega(\theta^{(n)}) \quad (32)$$

如果出现粒子衰退，那么采用正太分布的重要样本进行参数的 MCMC 中抽样，即 $\theta^* \sim N(\hat{\theta}, \hat{\Sigma})$ ，并通过粒子滤波计算新参数的接受率

$$\alpha(\theta^*) = 1 \wedge \frac{p(\theta^*) p(y_{1:T} | \theta^*) N(\theta; \theta^*, \hat{\Sigma})}{p(\theta) p(y_{1:T} | \theta) N(\theta^*; \theta, \hat{\Sigma})} \quad (33)$$

其中，参数的均值和方差分别为：

$$\hat{\theta} = \sum_{m=1}^M \theta^{(m)} \bar{\omega}(\theta^{(m)}), \quad \hat{\Sigma} = \sum_{m=1}^M (\theta^{(m)} - \hat{\theta}) \bar{\omega}(\theta^{(m)}) (\theta^{(m)} - \hat{\theta})' \quad (34)$$

如果模拟的均匀分布大于接受率，那么参数就更新，否则保持不变。这种动态化的估计参数的方法，可以很有效地解决非高斯非线性复杂动态空间模型的计量估计问题。

4 实证分析

4.1 数据的选取

本文选取沪深 300 指数（指数代码：000300；本文用 CSI300 指代，）和标准普尔指数（S&P500，本文用 SPX500 指代）指数的日收益率作为观测数据，这是由于沪深 300 指数和标准普尔指数包含的样本股票规模大、流动性好，能够反映中国和美国证券市场股票价格变动的概貌和运行状况，比较具有代表性，不仅可以为模型的参数评估提供支持，也可以为模型在不同市场上的表现提供标准。沪深 300 指数由中证指数有限公司编制，样本数据来源于国泰安数据服务中心的 CSMAR 中国股票市场交易数据库（<http://www.gtarsc.com/p/sq/#479>）。由于序贯贝叶斯参数学习对观测数据估计的指数增长时间特性和本文检测跳跃及波动的目的性，本文选取沪深 300 指数的时间区间为 2007 年 4 月 2 日到 2014 年 5 月 30 日共 1740 个收益率数据，标准普尔指数样本的时间区间为 2007 年 4 月 2 日到 2014 年 2 月 28 日，共计 1700 个收益率数据，数据来源为 <http://finance.yahoo.com/q/hp?s=%5EGSPC&a=00&b=3&c=2005&d=11&e=25&f=2015&g=d>。

4.2 模型的参数估计结果

文献中序贯参数学习的状态粒子数一般为 $N=200$ 至 400 ，本文选取每一个观测值下抽样 $N=300$ 个满足约束条件的参数粒子，每一个参数粒子下再选择 $M=500$ 个状态粒子进行粒子

滤波学习，同时用 MCMC 算法更新这 150000 个抽样粒子的联合密度。将 CSI300 指数和 S&P500Z 指数日收益率数据作为学习区间，收益率的计算方式如下，其中 y_t 是收益率， S_t 是观测到的指数价格：

$$y_t = \ln S_t - \ln S_{t-1} \quad (35)$$

表格 1 序贯参数学习估计的结果

Table 1: Parameter estimates by sequential parameter learning						
	λ_J	λ_D	α_{10}	β_{11}	β_{12}	α_{11}
SPX500	0.04845	0.02988	2.25E-06	0.37062	0.17805	0.09437
(std error)	0.00956	0.00855	8.86E-07	0.01335	0.00903	0.00840
CSI 300	0.07245	0.04164	2.30E-06	0.36192	0.18298	0.10666
(std error)	0.00866	0.00562	7.00E-07	0.01117	0.00710	0.00734

	α_{12}	γ_J	α_{20}	β_{21}	β_{22}	α_{21}
SPX 500	0.02547	1.76980	2.80E-06	0.17208	0.37554	0.08687
(std error)	0.00558	0.08196	1.16E-06	0.01286	0.01459	0.00683
CSI 300	0.01422	1.71182	2.27E-06	0.18365	0.36067	0.08191
(std error)	0.00469	0.06413	8.01E-07	0.00602	0.01411	0.00888

	α_{22}	γ_D	μ	σ	ν
SPX500	0.07200	1.10698	0.03768	0.71206	0.72678
(std error)	0.01000	0.11275	0.01668	0.05226	0.06783
CSI 300	0.07397	1.21457	-0.00969	0.72446	0.61092
(std error)	0.00689	0.07459	0.02422	0.03547	0.10215

表 1 是模型参数学习的结果，包括参数的估计值以及相应的标准差，且在样本序列后面参数开始慢慢收敛至某一水平，说明序贯参数学习时有效的。图 1 到图 4(见附录)是 S&P500 和 CSI300 指数参数拟合收敛的序列图。表 1 中， λ_J 和 λ_D 分别代表跳跃的风险溢价和扩散的风险溢价。标普 500 指数和沪深 300 指数的跳跃风险溢价都大于各自的扩散的风险溢价，而且各个参数都很显著，证明跳跃对收益率的影响大于扩散对收益率的影响，图 5 和图 6 分别是沪深 300 指数和标普 500 指数跳跃和扩散的风险溢价分解图，从中可以明显看出跳跃的风险溢价高于扩散的风险溢价。另外，跳跃和扩散各自强度和波动率的路径如图 7 至图 10 所示。同时，沪深 300 指数的跳跃风险溢价和扩散风险溢价估计值大于标普 500 指数的跳跃和扩散的风险溢价，存在的原因可能有：①指数构成的影响；②中国股市由于本身的机制问题和政府干预引导导致股市波动率较频繁，这种随机冲击的作用使沪深 300 指数跳跃的风险价格高于标普 500 指数跳跃的风险价格；③美国证券市场以相对较理性的机构投资者为

主，相对中国证券市场更加成熟，所以标普 500 指数的扩散风险溢价小于沪深 300 指数扩散的风险溢价。

$\{\alpha_{10}, \beta_{11}, \beta_{12}, \alpha_{11}, \alpha_{12}, \gamma_J, \alpha_{20}, \beta_{21}, \beta_{22}, \alpha_{21}, \alpha_{22}, \gamma_D\}$ 是刻画跳跃聚集以及与波动率相互反馈的模型参数。 α_{10} 和 α_{20} 是跳跃和扩散双变量模型的截距项系数，两项系数的值都非常小，接近 10^{-6} 。 $\{\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22}, \beta_{11}, \beta_{12}, \beta_{21}, \beta_{22}\}$ 中几乎所有的参数的粒子滤波结果都比较显著。

γ_J 和 γ_D 分别代表跳跃强度和波动率对跳跃和扩散的非对称反馈，由表 1 的估计结果，两参数都非常显著，表明负向冲击对波动率和跳跃强度产生比正向冲击更大的影响和反馈。 $\{\mu, \sigma, \nu\}$ 是 Variance Gamma 模型的三个参数， μ 是随机跳跃幅度的均值，标普 500 指数和沪深 300 指数的 μ 值都接近于 0，但是沪深 300 指数的跳跃大小的均值小于 0，标普 500 指数的跳跃大小的长期均值大于 0。 σ 和 ν 在 5% 置信度上十分显著。

4.3 跳跃聚集和波动率反馈分析

式 (11) 和 (13) 分别表示跳跃和扩散之间的聚集效应以及非对称反馈作用，表 2 显示了波动率非对称和跳跃聚集的结果。分析表 2 有如下几个结论：

(1) 标普 500 指数和沪深 300 指数跳跃和扩散对跳跃强度和扩散波动率的冲击的持续性大于扩散和跳跃对跳跃强度和扩散波动率冲击的持续性，且由表 1，各个 β 参数都显著可知，跳跃对扩散波动率的冲击和扩散对跳跃强度的冲击是存在而且可证实的。标普 500 指数跳跃对跳跃强度的冲击持续性和扩散对扩散波动率冲击的持续性大于沪深 300 指数跳跃和扩散各自的自兴奋性。

(2) 标普 500 指数和沪深 300 指数跳跃聚集的总的效应非常明显，但是标普 500 的跳跃自兴奋性比沪深 300 的跳跃自兴奋性略低，这是由于市场的运作机制和参与者的不同所致，即美国证券市场相对于中国证券市场更成熟一些，而且美国证券市场的参与者多为比较理性的机构投资者。

(3) 跳跃和扩散对跳跃强度和扩散波动率的反馈效应也十分明显。相对于标普 500 指数跳跃和扩散的交叉反馈来说，沪深 300 指数扩散对跳跃强度的交叉反馈相对较小，而标普 500 指数的跳跃对扩散波动率的交叉反馈相对较大，说明美国市场投资者对非常态风险（跳跃风险）更为敏感。

(4) 表中仅有跳跃的平均幅度不显著，因此标普 500 指数随机跳跃的均值与沪深 300 指数的随机跳跃幅度的均值都无法拒绝为零的假设。

表格 2 波动率非对称反馈和跳跃聚集分析

Table 2: Feedback and clustering analysis					
	LL	KS(Pvalue)	V_J	V_D	B_{11}
SPX500	5489.19	0.04328	0.00801	0.00848	0.70170
CSI300	5492.65	0.04528	0.00903	0.00943	0.73399

	B_{22}	B_{12}	B_{21}	B_{all}	A_{11}
SPX500	0.53577	0.23472	0.47684	0.97344	0.33107
CSI300	0.54376	0.21818	0.46940	0.98105	0.37207

	A_{12}	A_{21}	A_{22}	μ_J	σ_J
SPX500	0.05667	0.30476	0.16023	0.03768	0.50806
CSI301	0.03520	0.28575	0.18309	-0.00969	0.52489

5 结论

本文建立了刻画波动率聚集和跳跃自兴奋的双因子交互模型，解释了跳跃和扩散之间的相互影响和反馈机制，并计算出了跳跃和扩散对资产价格收益率的风险溢价，同时采用序贯贝叶斯蒙特卡罗模拟的参数学习方法对模型参数进行了估计，研究结果表明：

(1) 标普 500 指数和沪深 300 指数的跳跃强度和扩散波动率有明显的自兴奋现象，冲击对跳跃和波动率产生持续性的影响，表现为跳跃聚集和波动率聚集现象。同时，对跳跃和波动率的聚集进行分解，发现跳跃不仅对跳跃强度产生冲击的持续性影响，扩散也会对跳跃强度产生冲击的持续性影响，对扩散的波动率来说，情况也是如此，即扩散不仅会对扩散波动率产生冲击的持续性影响，跳跃也会对扩散波动率产生冲击的持续性影响。

(2) 跳跃和扩散都有非对称反馈现象，即负向冲击对跳跃和扩散的反馈影响大于正向冲击对跳跃和扩散的反馈影响。跳跃不仅对跳跃强度产生反馈，还会对扩散的波动率产生反馈，反之，扩散不仅会对扩散的波动率产生反馈，也会对跳跃强度产生反馈。标普 500 和沪深 300 扩散和跳跃之间的反馈不尽相似，取决于市场机制和投资者构成等因素。

(3) 由于市场因素，沪深 300 指数跳跃的风险溢价比标普 500 指数跳跃的风险溢价要高，而扩散的风险溢价要小，但对于两个指数来说，跳跃的风险溢价都高于扩散的风险溢价，证明了跳跃比扩散更能影响收益率波动的事实。

总的来说，本文的研究表明跳跃和扩散之间存在相互影响反馈作用，同时由于市场运作机制和参与者的不同，这种非对称影响在不同市场的指数收益率中有不同的表现。

6 参考文献

- [1] Press, S.J. . A compound events model for security prices [J]. Journal of Business, 1967, (40): 317 — 335
- [2] Todorov, V., and Tauchen, G. (2011), “Volatility Jumps”, Journal of Business and

Economic Statistics 29, 356-371.

[3] Eraker, B., Johannes, M., and Polson, N. (2003), “The Impact of Jumps in Equity Index Volatility and Returns”, *Journal of Finance* 58, 1269-1300.

[4] Peter Christoffersen a,b , Kris Jacobs c,d , n , Chayawat Ornthanalai, Dynamic jump intensities and risk premiums: Evidence from S&P500 returns and options, *Journal of financial Economics* 106(2012) 447-472

[5] Kou, Steven, A Jump Diffusion Model For Option Pricing (August 2001). AFA 2001 New Orleans Meetings. Available at SSRN: <http://ssrn.com/abstract=242367> or <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.242367>

[6] Carr, Peter and Wu, Liuren, Time-Changed Levy Process and Option Pricing (September 20, 2001). Available at SSRN: <http://ssrn.com/abstract=283999> or <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.283999>

[7] Dilip B. Madan, Peter P. Carr and Eric C. Chang, The Variance Gamma Process and Option Pricing, *European Finance Review* (1998) 2 (1): 79-105.

[8] Li, H., Wells, M., and Yu, L., (2008), “A Bayesian Analysis of Return Dynamics with Levy Jumps” , *Review of Financial Studies* 21, 2345-2378.

[9] Aï-Sahalia, Y., and Jacod, J. (2011), “Testing Whether Jumps Have Finite or Infinite Activity” , *Annals of Statistics*, 39, 1689-1719.

[10] Lee, S., and Hannig, J. (2010), “Detecting Jumps from Levy Jump Diffusion Processes” , *Journal of Financial Economics* 96, 271-290

[11] Black F. Studies of Stock Price Changes, *Proceeding of the 1976 Meeting of the American Statistical Association [EB] . Business and Economical Statistics Section*, 177—181.

[12] Christie A A . (1982) The stochastic behavior of common Stock variance - value , leverage and interest rate effects [J] . *Journal of Financial Economics*, 10: 407—432.

[13] Guojun Wu, The Determinants of Asymmetric Volatility , *The Review of Financial Studies*, Vol. 14, No. 3 (Autumn, 2001), pp. 837-859

[14] 陈千里: 中国股市波动集簇性和不对称性研究, [J], *湖北大学学报(自然科学版)*, 2002年9月

[15] 张维, 张海峰, 张永杰, 熊熊: 基于前景理论的波动不对称性[J], *系统工程理论与实践*, 2012年3月

[16] 李亚静, 何跃, 朱宏泉: 中国股市收益率与波动性长记忆性的实证研究, [J], *系统工程理论与实践*, 2003年1月

[17] 陈浪南, 孙坚强: 股票市场资产收益的跳跃行为研究, [J], *金融研究*, 2010年第4期

[18] K. C. Hsieh, P. Ritchken, An empirical comparison of GARCH option pricing models, *Review of Derivatives Research*, December 2005, Volume 8, Issue 3, pp 129-150

[19] 任枫, 汪波, 段晶晶: 非对称双指数跳跃扩散模型的 MCMC 估计, [J], *系统工程*, 2009年7月, 第27卷第7期

[20] Carr, P., and Wu, L. (2010), “Leverage Effect, Volatility Feedback, and Self-Exciting Market Disruptions” , Working Paper.

[21] Fulop, Andras and Li, Junye and Yu, Jun, Self-Exciting Jumps, Learning, and Asset Pricing Implications (June 18, 2014). Available at SSRN: <http://ssrn.com/abstract=1981024> or <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.1981024>

[22] Fulop, Andras; Li, Junye; and YU, Jun. Bayesian Learning of Impacts of Self-Exciting

Jumps in Returns and Volatility. (2012). Research Collection School Of Economics. Available at: http://ink.library.smu.edu.sg/soe_research/1325

[23] Doucet, A., N. J. Gordon, and V. Krishnamurthy (2001). Particle filters for state estimation of jump Markov linear systems. *IEEE Transactions on Signal Processing* 49, 613 – 624.

[24] Drew Creal, A Survey of Sequential Monte Carlo Methods for Economics and Finance *Econometric Reviews*,2012,31(3):245-296

[25] A ĩ-sahalia., and Jacod, J. (2011), “Testing Whether Jumps Have Finite or Infinite Activity”, *Annals of Statistics*, 39, 1689-1719

[26] Andrieu, C., Doucet, A. and Holenstein, R. (2010), Particle Markov chain Monte Carlo methods. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)*, 72: 269 – 342. doi: 10.1111/j.1467-9868.2009.00736.x

[27] 吴恒煜, 朱福敏, 温金明, Aaron Kim: 参数学习下 Lévy 动态波动率模型研究: 来自 S&P500 指数的收益率、风险测度及其期权的证据, [C], 2014 中国金融国际年会(CICF), 2014 年 7 月

[28] 吴恒煜, 朱福敏, 胡根华, 温金明: 基于参数学习的 GARCH 动态无穷活动率 Levy 过程的欧式期权定价[J], *系统工程理论与实践*, 2014,34(10):2465-2482.

[29] Andrieu, C., Doucet, A. and Holenstein, R. (2010), Particle Markov chain Monte Carlo methods. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)*, 72: 269 – 342. doi: 10.1111/j.1467-9868.2009.00736.x

7 附录

图 1: 沪深 300 指数参数估计结果 (1)

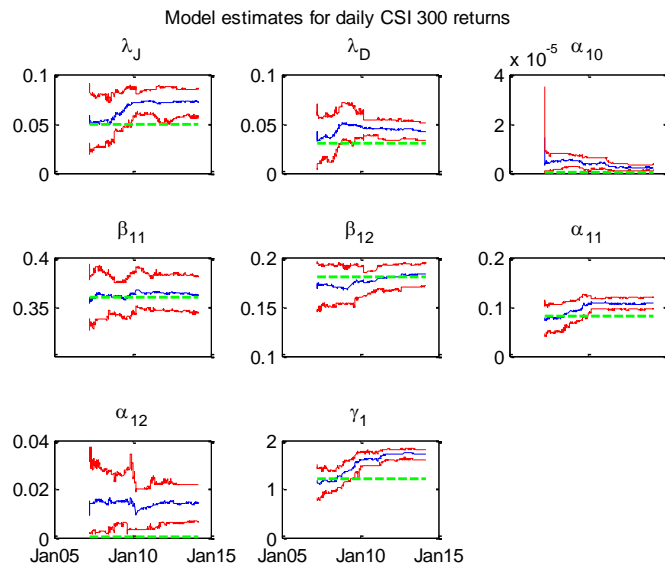


图 1 沪深 300 指数模型参数拟合(1)

图 2: 沪深 300 指数参数估计结果 (2)

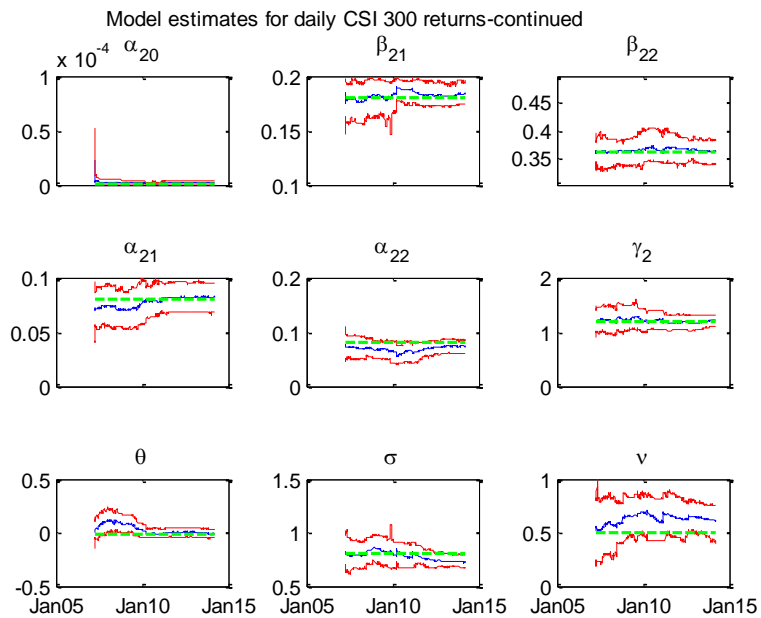


图 2 沪深 300 指数模型参数拟合(2)

图 3: 标普 500 指数参数估计结果 (1)

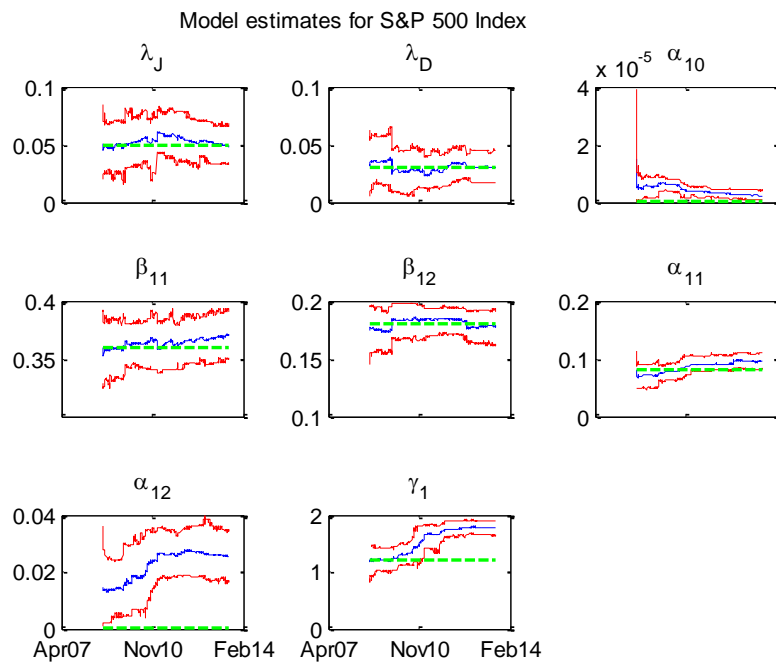


图 3 标普 500 指数模型参数拟合(1)

图 4: 标普 500 指数参数估计结果 (2)

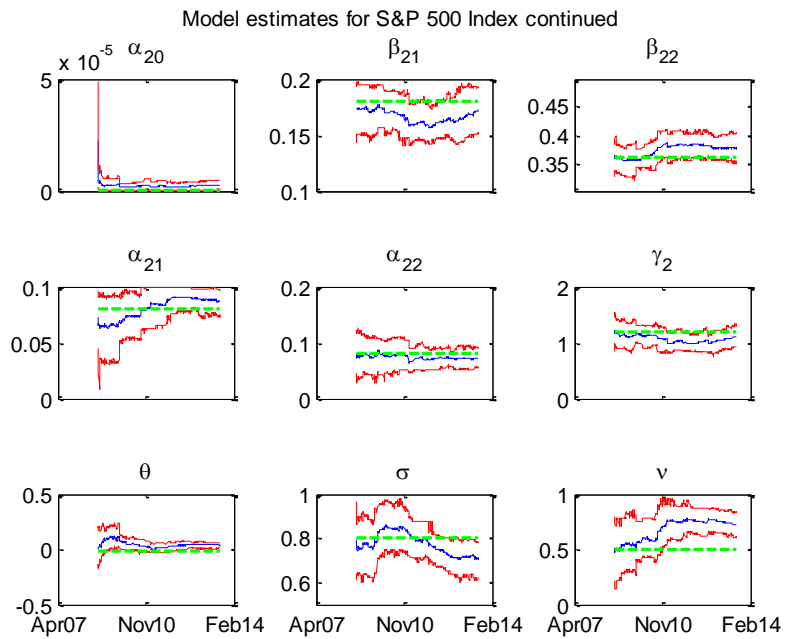


图 4 标准普尔 500 指数模型参数拟合(2)

图 5: 沪深 300 指数跳跃和扩散的风险溢价

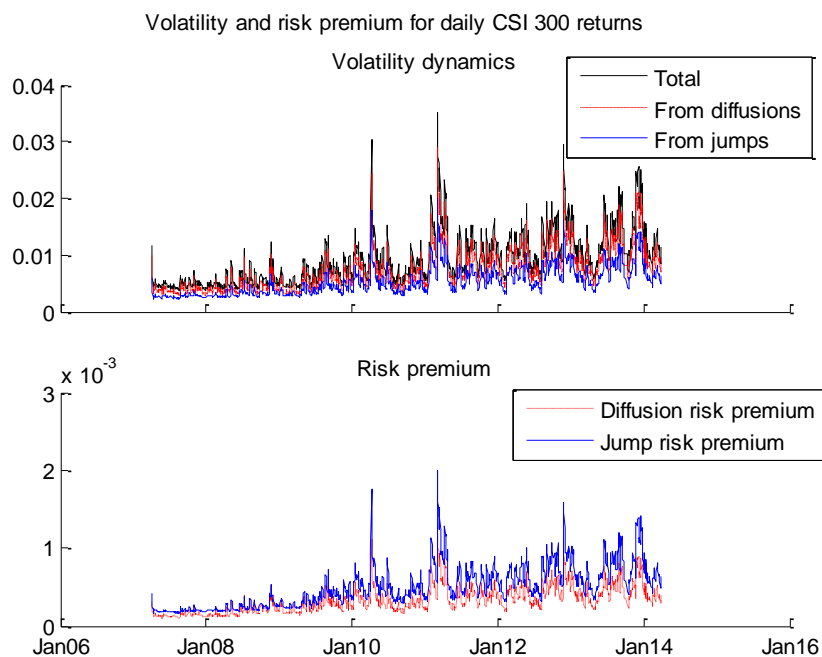


图 5 沪深 300 指数跳跃和扩散的风险溢价

图 6: 标普 500 指数跳跃和扩散的风险溢价

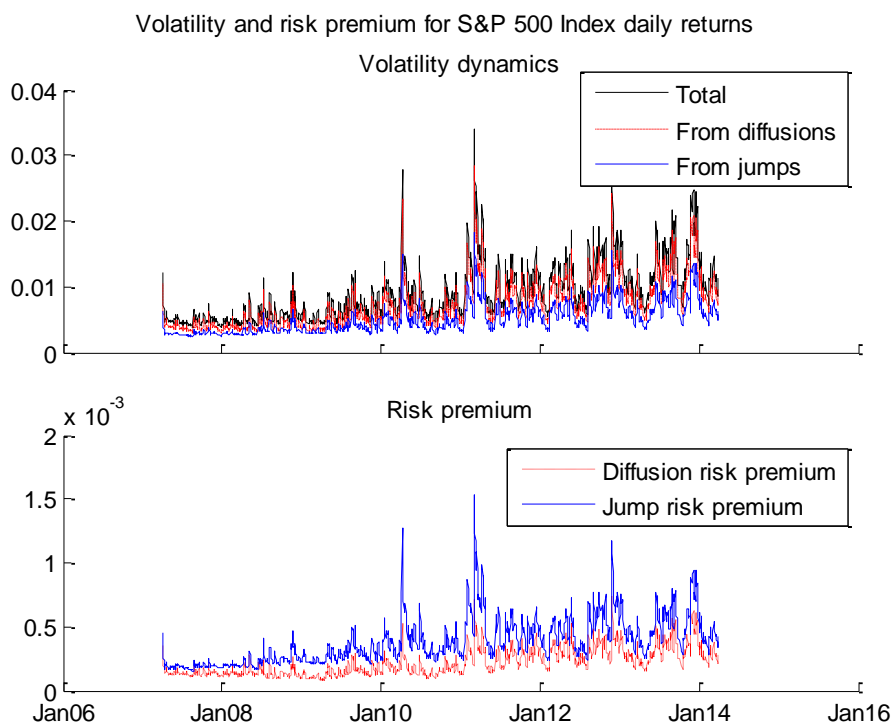


图 6 标普 500 指数跳跃和扩散的风险溢价

图 7：沪深 300 跳跃强度及跳跃大小的路径图

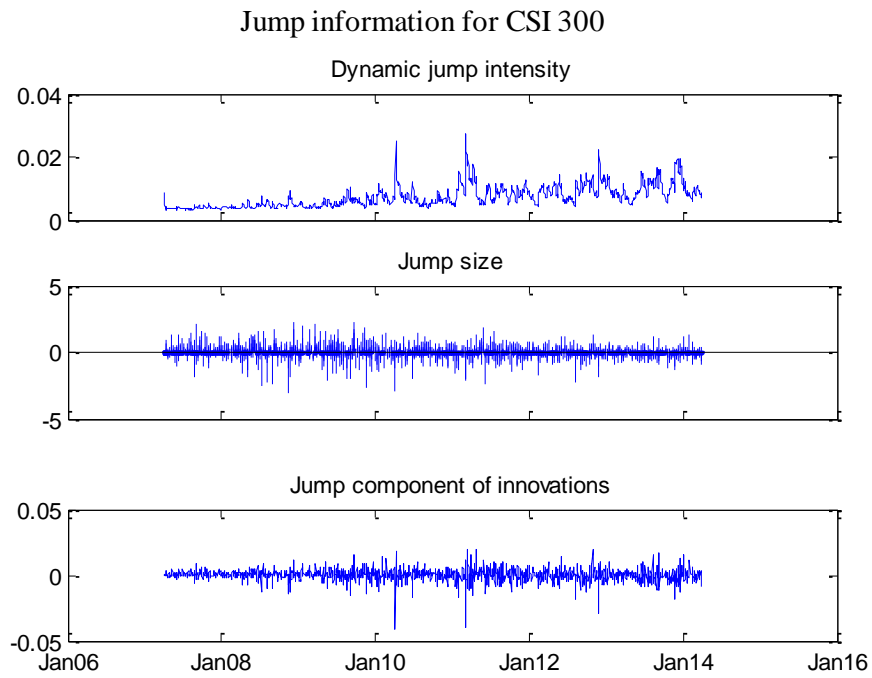


图 7 沪深 300 跳跃强度及跳跃大小的路径图

图 8：标普 500 跳跃强度及跳跃大小的路径图

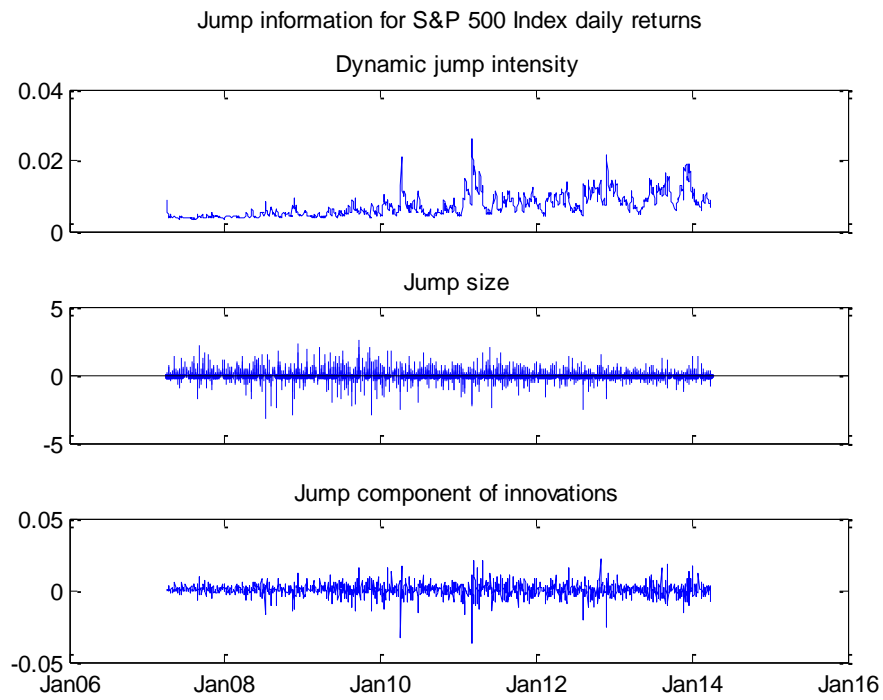


图 8 标普 500 跳跃强度及跳跃大小的路径图

图 9: 沪深 300 扩散及扩散波动率的路径图

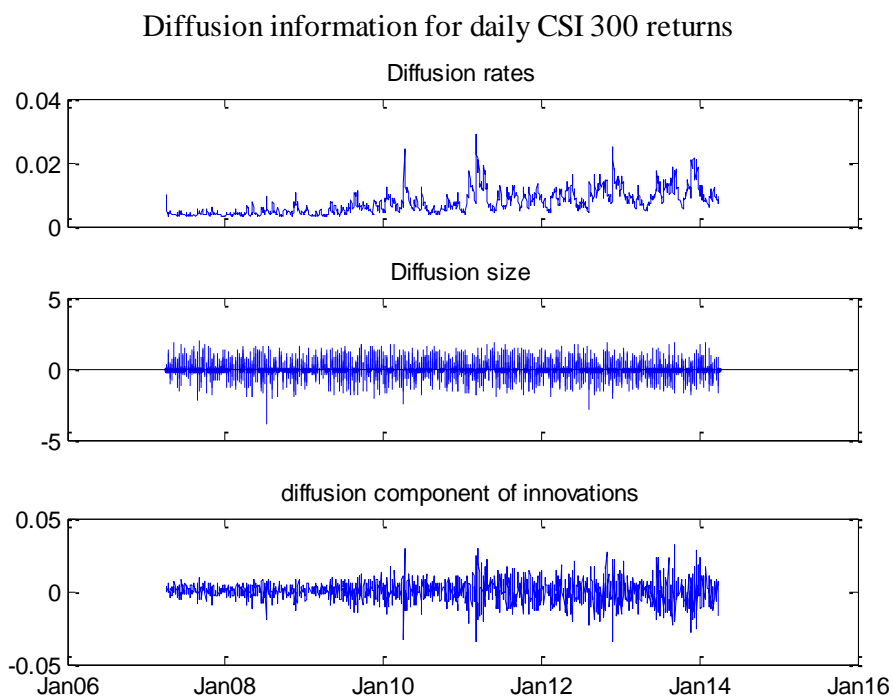


图 9 沪深 300 扩散及扩散波动率的路径图

图 10: 标普 500 扩散及扩散波动率的路径图

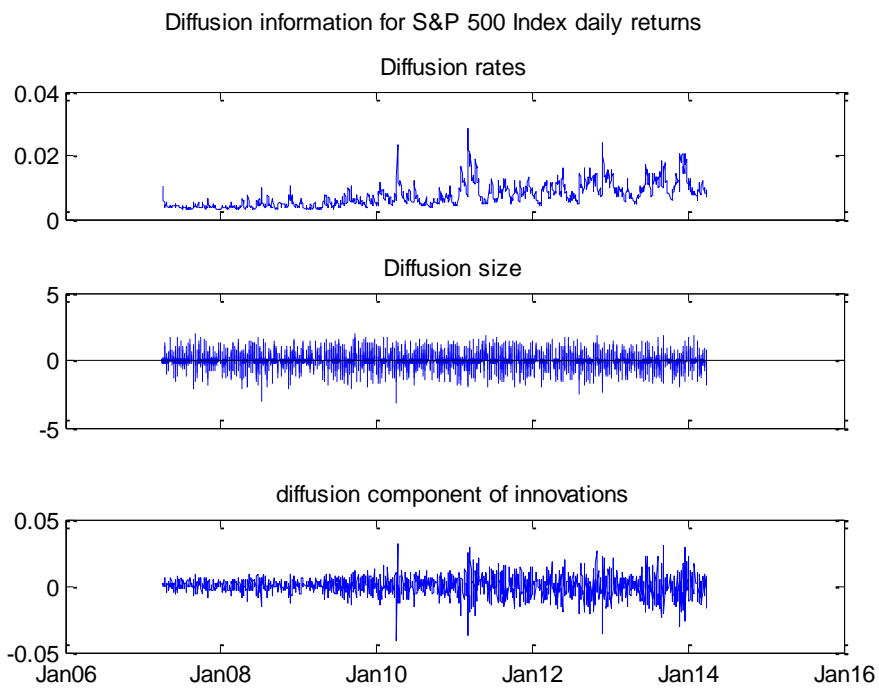


图 10 标普 500 扩散及扩散波动率的路径图

图 11: 沪深 300 指数参数学习信息

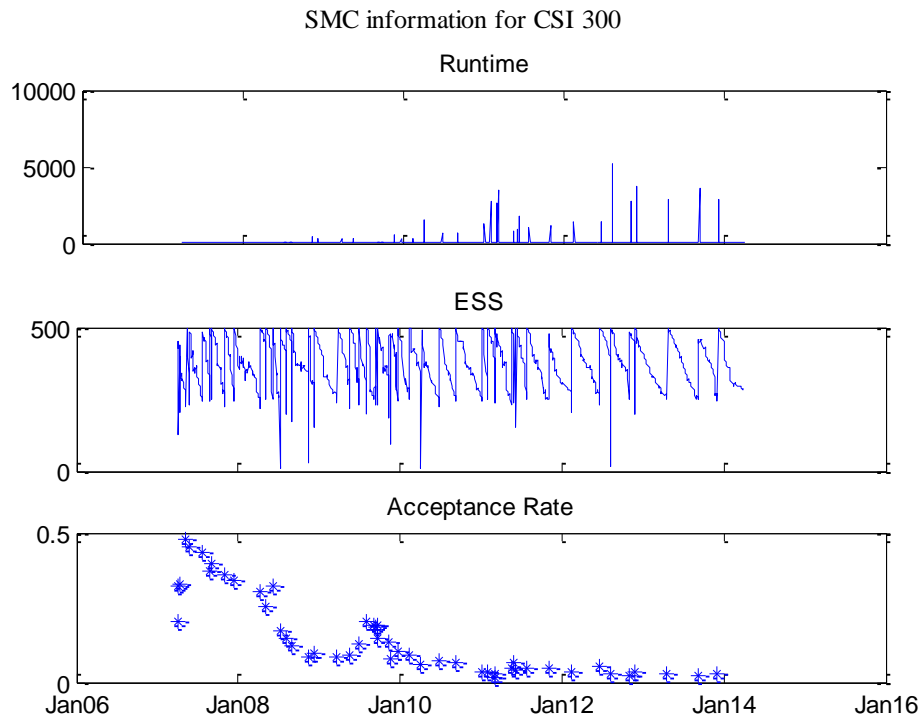


图 11 沪深 300 指数参数学习信息

图 12: 标普 500 指数参数学习信息

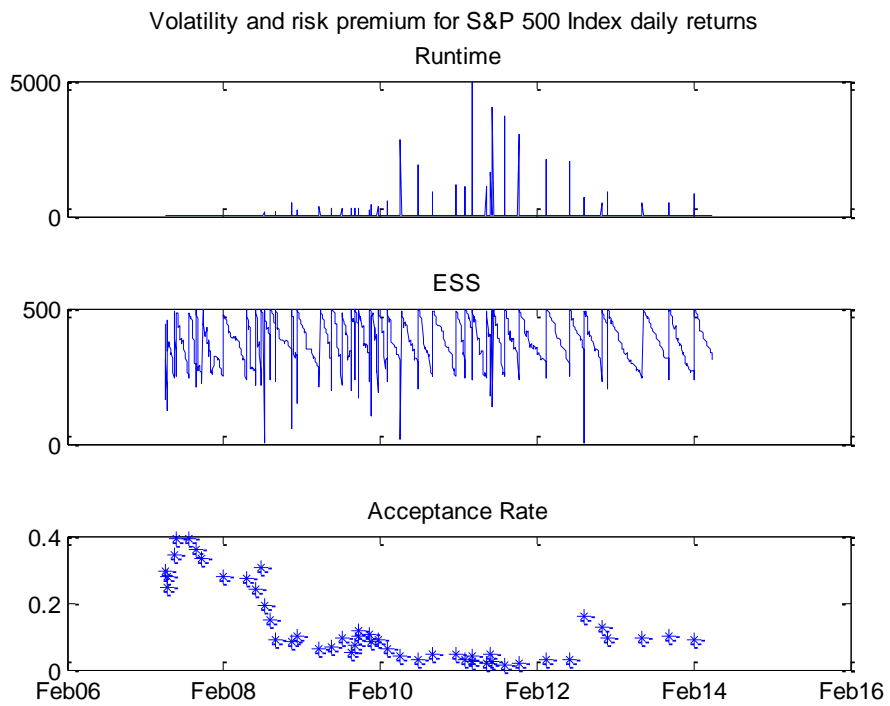


图 12 标普 500 指数参数学习信息